日本海ブロック試験研究集録
水産庁　日本海区水産研究所
第19号，13～25，1990

デルーリー法の歴史と最近の展開

赤嶺達郎
（日本海区水産研究所）

デルーリー法は閉鎖域における資源尾数推定法として，水産分野をはじめ広く用いられている。しかし，区間推定においては様々な試みがなされてきたが，決定版と呼べる手法はなかった。赤嶺（1990 a）は採集個体数が純粋に二項分布に従う場合において，決定版と言える手法を開発した（これは統計数理研究所の岸野洋久博士と遠洋水産研究所の平松一彦氏と共同で行ったものである）。この手法は計算機に等高線を作図させて値を読みとるというもので，きわめて平易で汎用性の高い手法であるが，計算機の利用なしには実行不能である。このため長く実用化できなかったものと思われる。この報告では細かい理論は他報にゆずり，歴史的経緯，等高線の作図方法，回帰モデルとの関係について解説する。

本文に入るに先立ち，回帰モデルとの関係について貴重な助言をいただいた岸野洋久博士，平松一彦氏および日本栽培漁業協会の北田修一氏に深謝する。

1．歴史的経緯

デルーリー法は閉鎖域において初期資源尾数 n と除去率（抽出率，漁獲率）p を同時に推定する方法で，対象資源は除去（漁獲）のみによって減少するという前提である。したがって，移動力の大きい魚類には適用が難しく，移動力の小さい砂浜性二枚貝や岩礁性巻貝等に適している。データは各漁獲時の漁獲尾数 r と漁獲努力量 x である。漁獲努力量 x は調査員がコントロールできる量だから，本質的なデータは漁獲尾数 r のみである。

漁獲努力量 x がすべて等しい場合を特別に除去法（removal method）と呼び，詳しく研究されている。除去法では多項分布（二項分布の積）に基づいた厳密な理論が展開されてきたが，水産分野においては漁獲努力量一定の仮定は満たされない場合が多く，もっぱら回帰モデルとして扱われているデルーリー法が用いられてきた。使用者からみると両者の差は非常に大きく，除去法は水産分野ではほとんど使用できない。しかし，多項分布モデルにおいては計算は除去法に限定した方がはるかに簡単であり，モデル論の立場からもデルーリー法と除去法は本質的に同一である。

デルーリー法（除去法）の本質は除去（漁獲）による密度低下によって採集個体数（CPUE）が低下するということである。除去における基本式は

$$\mathrm{E}(r)=np \qquad (\mathrm{E}\ \text{は期待値}) \tag{1.1}$$

であり，データ r から2つのパラメータ n と p を求めるわけである。（1.1）式より，2つのパラメータの積 np は精度よく推定できるが，n と p を分離することはかなりむずかしいことがわかる。

パラメータ推定の方針としては，基本式（1.1）に最小二乗法を用いて

$$Y=\Sigma\frac{(r-np)^2}{w}\qquad (w\text{ は重み})\qquad (1.2)$$

という目的関数を考え，これを最小にするパラメータ n と p の値を求めればよい。しかし，ここで大きな問題が２つある。

(a) これは非線型モデルである。回帰直線の場合はパラメータが a と b のとき，$E(y)=a+bx$ となっていて，a と b は線型（１次結合，和の型）であるから正規方程式を１回だけ解けば簡単に求まる。しかし，（１．２）式では np は n と p の積だから非線型となり，反復法を用いなければ解くことができない。

(b) 重み w の値が不明である。これは基本式（１．１）だけでは点推定のみ可能で，区間推定不能なためである。n と p が与えられたとき，実現値 r のバラツキ（分散）を与えなくてはならない。確率論的には二項分布を仮定するのがもっとも合理的である。これはすべての個体が同じ確率 p で除去されるという仮定から導かれる分布である。除去法はこの二項分布を用いた厳密なモデルである。回帰モデルにおける従来の分散の扱いについては第３章で解説する。

(a)については計算機を使用して，マルカール法等の一般的な最適化法を用いれば容易に解くことができる。(b)についても計算機を用いれば，漁獲努力量が一定でないデルーリー法においても除去法と同様に，二項分布に基づくモデルが容易に扱える。したがって，$w=\sigma^2=npq$ $(q=1-p)$ となるが，これは後述のように我々の求めた目的関数と一致する。

除去率 p が他の調査や実験によって明らかにされている場合には，初期資源尾数 n だけを推定する『抽出法』となり，１回だけの漁獲でも区間推定可能である。これは『与えられたデータを95%以内の確率で得るパラメータの範囲を95%信頼区間とする』という解釈で『逆推定の方法』と呼ばれる。抽出（除去）過程を二項分布モデルとみなし正規分布に近似することにより，２次方程式を解くだけで簡単に区間を得ることができる。通常はこれで十分であるが，漁獲尾数が極端に少ない場合は正規分布への近似が悪くなる。この場合には事前分布に一様分布を仮定したベイズモデルが有効である（赤嶺1988ａ，1988ｂ；Akamine 1989ｂ）。

逆に初期資源尾数 n が明らかで除去率 p のみを推定する場合にも事情は全く同様で，二項分布モデルの正規分布近似とベイズモデルが有効である。通常は n を求める場合が多いので，このような場合は少ない。しかし，標識再捕調査の基本であるピーターセン法を二項分布に近似して解く場合はこれに相当する。ピーターセン法は厳密には超幾何分布モデルなので，ベイズ化には工夫が必要であるが詳細は割愛する（赤嶺1988ｃ，1989ａ；Akamine 1989ｃ）。

デルーリー法では２つのパラメータを同時に推定するため２回以上の漁獲を行う必要がある。しかも２つのパラメータの一方のみを推定する場合と比較して，信頼区間が著しく長くなる。田中（1985）は『np の値はかなり正確に推定できるが，n と p を分離するのがむずかしい』と指摘している。デルーリー法においては区間推定が特に重要なのはこのためである。実際の調査においては除去率 p を別個に推定して，抽出法に持ち込んだ方がよい。

デルーリー法については Seber（1982）の第７章に詳しい総論がある。1947年に DeLury が発表

する以前に，Leslie and Davis が1939年に発表しているため，正確にはレスリー法と呼んだ方がよい。これらは回帰モデルで DeLury は区間推定も行っている。これについては第３章で改めて検討する。

一方，漁獲努力量一定の除去法においては，計算が比較的容易だったため，厳密な多項分布モデルが検討され，Zippin（1966）はグラフを用いて最尤法を点推定に適用した。しかし，グラフを用いるというハンディのため，あまり普及していない。現在では計算機で容易に最尤解を得ることができるから，この点に関しては歴史的価値しかない。彼は２つのパラメータのそれぞれの分散の推定式を求め，これを使って区間推定を行っている。これは非常に価値のある業績であるが，点推定値に対して左右対称な信頼区間となっている点が不十分である。初期資源尾数 n は点推定値よりも大きい方の区間が非常に長くなるからである。さらに多項分布モデルに適合度の検定を行って，モデルとデータの適合性をチェックしている。しかも適合度の統計量が

$$Y=\Sigma\frac{(r-np)^2}{npq} \qquad (1.3)$$

と近似することを指摘している。これは非常に重要な指摘である。というのは今回我々が求めた目的関数とこの式がまったく同一だからである。

我々は尤度比検定より出発して同一の結論に到達したのであるが，これは適合度検定と尤度比検定が本質的に等しいことに起因する。それは両方とも χ^2分布を用いることからもうかがえる。Zippin が適合度検定，点推定，区間推定をそれぞれ別の方法で行ったのに対し，我々はすべて同一の目的関数（１．３）式で処理した点が最大の違いである。その方が理論的にもスッキリするし，最尤法の偏りも修正できる。それは（１．１）式が除去法の基本であり，（１．３）式はその『重み付き最小二乗法』となっているからで，Zippin はこの点も既に指摘している。

除去法の研究は最近も続けられているが，見るべきものは少ない。その中で最重要のものは Schnute（1983）であろう。彼は簡単な最適化法であるシンプレックス法を用いて，最尤法による点推定を行い，推定値に偏りが生じることを指摘した（推定値に偏りが生じるのは最尤法の一般的性質である）。さらに区間推定では尤度比検定を行い非対称な信頼区間を得ている。しかし，彼はここで χ^2分布の自由度を１にするという誤りを犯している。

初期資源尾数 n と除去率 p を同時推定するのであるから，χ^2分布の自由度は２でなくてはならない。抽出法では除去率 p の値が既知だから $p=p_0$ という制限条件がつくため，自由度は１だけ減少して１となる。彼は初期資源尾数 n だけを求めようとしたため，

$$\frac{\partial Y}{\partial p}=0 \qquad (Y\text{は目的関数}) \qquad (1.4)$$

という制限を考えた。このため自由度を１としたわけであるが，問題はこの制限の妥当性である。この制限によると p は各 n に対して常に Y が最大になる値をとる。つまり p は n の関数となるわけである。これはあまりに虫のいい仮定ではないだろうか。除去率 p は採集面積や漁具効率に依存する値であり，初期資源尾数 n とは無関係のパラメータのはずである。Schnute の方法では，全く

同じ条件で調査を行っても，n が大きい場合には p は小さく，n が小さい場合には p は大きいと勝手に決めるわけで，除去法の概念をとり違えている。おそらく点推定の計算においてこの制限式を用いるため，勘違いしたものと思われる。p と n のつくる平面上で自由度２の場合には信頼域は歪んだ楕円になるのに対し（歪むのは非線型なため），SCHNUTE の方法では曲線上の一部分だけになる（ただし，自由度２とすれば AKAMINE 1990 b の方法と一致する。この場合にはこの曲線を便宜上利用しただけである）。

SCHNUTE の誤りが重大なのは，自由度１とすることによって，本来の自由度２の信頼区間よりも短く推定されるからである。彼の方法をパラメータ数 N の場合に応用すると，自由度 N を自由度１にしてしまうわけだから，非常に大きな誤りを犯すことになる。信頼域をできるだけ小さくとるのが統計学の立場であるが，誤って小さくしているわけで，『本当は信頼域に含まれる部分を棄却してしまう』という誤りを犯していることになる。

点推定に関しては多項分布モデルが既に確立されているのだから，機械的に最尤法を当てはめればよく，計算機と適当な最適化法さえあればよい。さらにこのモデルでは２つの連立な非線型方程式を１つにまとめることができる（代入法）ので，１変数のニュートン法や二分法で十分である。SCHNUTE （1983）の本来の目的は漁獲努力量一定という枠をはずすことにあって，除去率 p にいろいろな仮定を加えたモデルを比較検討している（彼は尤度比検定を用いたが，MATSUMIYA 1990は AIC で比較している）。しかし，p にあまり妥当性のない仮定を考えるよりも $p_i = x_i p$ として，除去率が一定でないモデルに拡張した方が賢明であろう。漁獲努力量 x は調査員の方でコントロールできるパラメータであるから，定数として設定すべきだろう。

AKAMINE （1990 b ）は抽出法とピーターセン法の延長としてこのモデルをとらえ，ベイズ化を試みた。しかし，結果は否定的でベイズ化は困難であった。これは抽出法とピーターセン法で有効であった『逆推定の方法』がこのようなモデルでは不適当なためと思われる。つまりデルーリー法のモデルではネイマン流の信頼区間，つまり『その区間内に真のパラメータ値が95％以内の確率で存在する』という意味の信頼区間が要求されるからである。データの誤差が非常に大きい場合には，パラメータ値をどのようにとっても，95％以内の確率でそのデータを得ることは不可能だからである。

我々の目的関数（１．３）式では $Y \leqq Y_{\min} + \chi^2(2)$ の範囲がネイマン流の信頼区間を与え，$Y \leqq \chi^2(m)$ が AKAMINE （1990 b ）が求めた積集合の領域を完全に包含する。前者は相対的な値（$Y_{\min}$ があるから）なので常に存在するが，後者は絶対的な値なのでデータの誤差が大きくなると領域が狭くなり，ついには消滅する。もっとも，このような誤差の大きなデータは，適合度検定 $Y_{\min} \sim \chi^2(m-2)$ によって不適当となる可能性が強い。

AKAMINE （1990 b ）ではモデルとして二項分布の積（多項分布）を考え，抽出法やピーターセン法と同様に正規分布に近似して処理している。点推定では最尤法のプログラムを提供しているが，最尤法では偏りが生じることが問題として残っている。区間推定は X-Y プロッターを用いて p-n 平面上で作図を行い，その領域の端の値を読み取る方法をとっている。しかし，前述のように信頼域が通常のネイマン流のものでない点が問題であった。詳しくは赤嶺（1989 d ）を参照されたい。

Akamine （1990 b ）では正規分布の z の値を考えたのであるが，z ではなく Σz^2 の値を考えた方が，よりスマートに処理できる。これは尤度比検定の理論より裏付けされる。この場合，最尤法と同様に偏りが生じるが，不都合な項を削除することにより，偏りのない推定値を得ることができ，目的関数（１．３）式を得る。このような操作を『部分尤度』と呼ぶが，適用には細心の注意が必要である。今回の場合には正規分布をさらに標準正規分布へ変換するという解釈が成立する。詳しくは赤嶺（1990 a ）を参照されたい。

以上で最終的な偏りのない目的関数と検定方法が確立できたわけである。しかし，本質的には Zippin （1966）も既にこのレベルに到達していたと考えられる。いかにして実用化するかということが問題である。これは計算機を利用すれば容易である。まず点推定であるが，パラメータ数が多変数では最小の２だから，一般的な最適化法で十分である。Schnute （1983）が用いたシンプレックス法でもよいが，赤嶺（1990 a ）のマルカール法の方が速いだろう。ただし，初期値はできるだけ精度のよいものの方が収束がよいので，通常の回帰モデルで求めた値を使用するのがよい。区間推定は p-n 平面上で領域を作図して，端の値を読み取れば十分である。この領域は細長く引き延ばされた歪んだ楕円であるが，その等高線（ contour ）の作図方法については次章で解説する。

２．等高線の作図方法

線型モデル（例えば重回帰モデル）の信頼領域は楕円形であるが，非線型モデルではそれが細長く引き延ばされてバナナ状に曲げられたものとなる。Draper and Smith (1966) の図10．3 にはフリーハンドで描かれた図が掲載されている。この本は Zippin (1966) と同時期のものであるが，この時期には計算機や作図ソフトは手軽に使えなかったようである。

デルーリー法についてこの領域を作図したものに田中（1985）がある。これは自然死亡係数 M も取り入れたモデルであるが，本質的にデルーリー法とみなしてよい。図５.11（これは n と e^{-M} の平面）では楕円は曲がっているが，p-n 平面である図５.10では曲がっていない。これは解（最小値）のごく近傍だけを描いたためと思われる。この２つの図はかなり精密であるが，フリーハンドで描かれたもので，かなり労力を要する。平松（私信）はこの図５.11を計算機に作図させたが，１時間を要している。これはすべての格子点において目的関数の値を計算し，領域ごとに色分けを行うもので，後述の格子法の簡便法である。時間を食うのが欠点であるが，ラフな推定には十分である。

計算機に作図させるプログラムはいろいろ開発されている。作図機械は CRT ディスプレイまたは X-Y プロッターであるが，原理は同一である。フリーハンドで描く方法に似た『ペナルティ法』という方法があるが，閉曲線が閉じないという欠点がある。この方法はイメージとしては相対座標として極座標を用いるような手法で，かなり効率的に描くことができるが，最初と最後の点の判定が面倒である。また，分離した部分（通常のデータでは起こらないが）を見落とす危険性もある。したがって，効率的ではないが安全な『格子法』を採用することにする。

格子法はイメージとしては絶対座標として直交座標を用いるような手法である。森本（1984）に

わかりやすく解説されている。水産分野における最初の導入は石岡ら（1981）による等漁獲量曲線の作図であるが，加藤（1988）にプログラム例がある。しらみつぶしに調べる方法なので時間がかかるのが欠点であるが，見落としの心配は少ない。これらの作図法はいずれも近似図形を描くためのものであり，複雑な図形では精密に描くことは困難であるが，我々の目的には十分である。

x-y 平面上で $Y(x, y)=\alpha$ の等高線を描く場合，格子法の具体的な手順は以下のようになる。

(a) $F(x, y)=Y(x, y)-\alpha=0$ とおく。

(b) 描く範囲を $x=x_a \sim x_b$，$y=y_a \sim y_b$ と決定する。

(c) $m \times n$ の格子に分割する。ここで $x_k=x_a+sk$，$s=(x_b-x_a)/m$，$y_h=y_a+th$，$t=(y_b-y_a)/n$ とおく。

(d) 各格子において以下の操作を行う。四隅の座標を $p_1=(x_k, y_h)$，$p_2=(x_k, y_{h+1})$，$p_3=(x_{k+1}, y_{h+1})$，$p_4=(x_{k+1}, y_h)$，$p_5=p_1$ とおく。次に $F(p_i)F(p_{i+1})$ の値を計算する（F の値は配列に記憶しておくと計算が速い）。この値が正ならば辺 p_ip_{i+1} は等高線と交差していないので何もしない。この値が0以下のときは等高線と交差しているので比例配分（直線近似）で交点を推定する。交点の座標の推定値は $q_i(x, y)=\{F(p_i)p_{i+1}-F(p_{i+1})p_i\}/\{F(p_i)-F(p_{i+1})\}$ となる。接点となる場合は無視するので，等高線は必ず２本の辺と交わる。したがって，２つの交点を線分で結べばよい。これがこの格子内における等高線である。

さて，この方法で今回のモデルを描いてみるとうまく描くことができない。滑らかな曲線が凸凹の線になってしまう。これは比例配分したことによる交点の推定値の誤差の影響である。さらに領域の端の部分では曲線が不連続になってしまう。これは描こうとする領域が細長いため，ひとつの格子に２本の等高線が交わっているからである。このように細長くて尖っている図形は，どの作図プログラムを用いても容易には描けない。等高線は交わらない（接することはある）から，２本の右下がりか左下がりの線分になる。今回のモデルでは右下がりの場合だけだから，４本すべての辺と交わっている場合には２本の右下がりの線分 q_1q_4，q_2q_3 を引けばよい。

この方法を採用してもきれいな図はなかなか描けない。それは比例配分による誤差が解決されていないからである。より高次の近似式を用いて交点の精度を高くする方法もあるが，きれいな図を描くもっとも単純で有効な手段は，格子を細かくすることである。もっとも，これは逆に時間を食うというデメリットがある。150×100の格子でも30分もかかる。しかし，我々の真の目的はきれいな全体図を描くことではなく，左右の端の値を読みとることである。したがって，端の拡大図を描かせればよい。これは全体図で格子を細かくするのと同じ効果がある。50×30の格子で十分に実用的で，３分で描くことができる。この拡大図を描く場合には前段で述べた２本の線分を描く操作は不要である（もっとも，端の位置を知るには大ざっぱな全体図を描かせる必要があるが）。

３．回帰モデルの周辺

従来用いられてきた回帰モデルにおいて，DeLury による区間推定の方法について解説し問題点を検討する。従来の回帰モデルは基本式（１．１）を変形して

$$E\left(\frac{r_i}{x_i}\right) = np - pR_{i-1}, \quad R_i = \sum_{k=1}^{i} r_k \tag{3.1}$$

としたもので，独立変数（横軸）は $x = R_{i-1}$，従属変数（縦軸）は $y = r_i / x_i$ としている（以下では x は漁獲努力量ではなく独立変数を表す）。x は累積漁獲尾数，y は CPUE である。一般的な最小二乗法より回帰式 $y = a + bx$ の係数 a と b が求まり，（3．1）式より

$$a = np, \quad b = -p \tag{3.2}$$

であるから p と n が求まる。この方法は個体数推定の立場から眺めると，計算が容易で理解しやすく，さらに点推定において偏りが生じないという点で（最尤法よりも）優れている。しかし，区間推定は単純ではなく，分散についての仮定が必要であるが，これについては後で検討する。

まず n の分散を求める。それには『誤差伝播則』を用いればよい。これは Seber（1982）には『デルタ法』という名で紹介され，久野（1986）では誤差伝播の問題として扱われている。要するに微分における『1次近似』の応用にすぎない。（3．2）式より

$$n = -\frac{a}{b} \tag{3.3}$$

である。したがって，n は a と b の関数だから全微分すると

$$\mathrm{d}n = \frac{\partial n}{\partial a}\mathrm{d}a + \frac{\partial n}{\partial b}\mathrm{d}b \tag{3.4}$$

となる。ここで d を $\varDelta$ に変更して次の近似式を得る。

$$\varDelta n = \frac{\partial n}{\partial a}\varDelta a + \frac{\partial n}{\partial b}\varDelta b \tag{3.5}$$

両辺2乗して

$$\varDelta n^2 = \left(\frac{\partial n}{\partial a}\right)^2 \varDelta a^2 + 2\frac{\partial n}{\partial a}\frac{\partial n}{\partial b}\varDelta a\,\varDelta b + \left(\frac{\partial n}{\partial b}\right)^2 \varDelta b^2 \tag{3.6}$$

となる。これより次の一般的な誤差伝播則を得る。

$$\mathrm{V}(n) = \left(\frac{\partial n}{\partial a}\right)^2 \mathrm{V}(a) + 2\frac{\partial n}{\partial a}\frac{\partial n}{\partial b}\mathrm{Cov}(a, b) + \left(\frac{\partial n}{\partial b}\right)^2 \mathrm{V}(b) \tag{3.7}$$

V は分散，Cov は共分散である。今回のモデルでは具体的に，（3．3）式より

$$\frac{\partial n}{\partial a} = -\frac{1}{b}, \quad \frac{\partial n}{\partial b} = \frac{a}{b^2} \tag{3.8}$$

となるから，（3．7）式に代入すると

$$\mathrm{V}(n) = \frac{b^2\mathrm{V}(a) - 2ab\mathrm{Cov}(a, b) + a^2\mathrm{V}(b)}{b^4} \tag{3.9}$$

を得る。n は a と b の関数なので，$V(n)$ も a と b の関数となっている。ここで（3．3）式を用いると

$$\mathrm{V}(n)=\frac{\mathrm{V}(a)+2n\mathrm{Cov}(a,b)+n^2\mathrm{V}(b)}{b^2} \tag{3.9'}$$

となるが，この式では$\mathrm{V}(n)$をnとbの関数で表している点に注意する必要がある。

さて，回帰モデルの一般論より$y=a+bx$の回帰係数の分散は

$$\mathrm{V}(a)=c_{11}\sigma^2,\quad \mathrm{Cov}(a,b)=c_{12}\sigma^2,\quad \mathrm{V}(b)=c_{22}\sigma^2,$$

$$H^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}\cdot(H\text{はヘシアン行列}) \tag{3.10}$$

で与えられる（例えばDRAPER and SMITH 1966の第2章参照）。具体的な目的関数は

$$Y=\sum_{i=1}^{m}(a+bx_i-y_i)^2 \tag{3.11}$$

だから

$$\frac{\partial Y}{\partial a}=2\Sigma(a+bx-y),\quad \frac{\partial Y}{\partial b}=2\Sigma x(a+bx-y) \tag{3.12}$$

となる。この2式を0とおくことにより，次の点推定値aおよびbを得る。

$$a+bx_0=y_0, \tag{3.13}$$

$$b=\frac{\Sigma(y-y_0)(x-x_0)}{\Sigma(x-x_0)^2}, \tag{3.14}$$

$$\text{ここで}\ x_0=\Sigma x/m,\quad y_0=\Sigma y/m.$$

この論文ではx，yの平均値（重心）を(x_0, y_0)と記述する。さらに，

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial a^2}=2m,\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial a\partial b}=2\Sigma x,\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial b^2}=2\Sigma x^2 \tag{3.15}$$

となるから，

$$H=2\begin{pmatrix} m & \Sigma x \\ \Sigma x & \Sigma x^2 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

である。この逆行列は公式より簡単に求まり

$$H^{-1}=\frac{1}{2}\ \frac{1}{m\Sigma(x-x_0)^2}\begin{pmatrix} \Sigma x^2 & -\Sigma x \\ -\Sigma x & m \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

である。これが（3.10）式の各cの具体的な式である。また，σ^2には誤差分散の不偏推定式を用いるから，

$$\sigma^2=S^2/(m-2) \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
\text{ここで}\quad S^2&=\Sigma(a+bx-y)^2\\
&=\Sigma\{(y-y_0)-b(x-x_0)\}^2\\
&=\Sigma(y-y_0)^2-2b\Sigma(x-x_0)(y-y_0)+b^2\Sigma(x-x_0)^2\\
&=\Sigma(y-y_0)^2-b^2\Sigma(x-x_0)^2\\
&=\Sigma y^2-my_0^2-b^2(\Sigma x^2-mx_0^2)
\end{aligned}$$

のどの式を用いてもよい。以前は手計算用に一番下の式を用いることが多かったが，桁落ちの問題

が生じるため，計算機用には一番上の式を用いた方がよい。なお，本論から外れるが，石岡（1988）は残差平方和を求めるシンプルでスマートな奥村（1987）による漸化式を紹介している。

以上は誤差伝播についての一般論であり，何も問題はない。ここからが区間推定の本題である。DeLury は（3.9'）式の V（n）を用いて t 検定を行った。つまり

$$t=(n-n^*)/\sqrt{V(n)} \tag{3.19}$$

としたわけである。ここで t は自由度（$m-2$）の t 分布の値，n^*は n の点推定値である。これより n についての2次方程式

$$t^2\sigma^2(c_{22}n^2+2c_{12}n+c_{11})^2=(n-n^*)^2 \tag{3.20}$$

が導けるから，これを解けばよい。Seber（1982）および久野（1986）ではこの式と同値な

$$\left(b^2+\frac{t^2\sigma^2}{\Sigma(x-x_0)^2}\right)x^2+2by_0x+y_0{}^2-\frac{t^2\sigma^2}{m}=0 \tag{3.21}$$

を用いている。ここで $n=x_0+x$ である。

この方法では点推定値 n^*以外の点 n において95％信頼区間を計算し，n の信頼区間を求めているが，抽出法における逆推定の方法に類似している。しかし，分散 V（n）は（3.9）式が示すように点推定値 n^*についての評価である。（3.9'）式のように a を n に変更しただけで，n^*以外の n の分散になっているのだろうか（V や Cov の値は変化しない）。

なお，能勢（1959）は DeLury の第2モデル（対数モデル）について同様な解説を行っている。さらに能勢（私信）は t 検定を

$$t=(n-n^*)/\sqrt{V(n^*)} \tag{3.22}$$

とおいて，（3.19）式と比較している。これは（3.9'）式のかわりに（3.9）式を用いたことに相当する（a と b は点推定値 n^*を与えるから）。つまり，点推定値 n^*において95％信頼区間を計算しているわけである。（3.22）式では分母が n の関数ではなく定数であるから（3.19）式よりも簡単である。（3.19）式が左右非対称な区間を与えるのに対し，（3.22）式では左右対称の区間を与える。

この方法で問題になるのは t 検定の妥当性である。t 検定は X が標準正規分布 $N(0,1)$ に従い，U が自由度 n の χ^2分布に従うとき

$$T=X/\sqrt{U/n} \tag{3.23}$$

が自由度 n の t 分布に従うことを利用する検定方法である。ここでは（$n-n^*$）が X に，（$n-2$）V（n）が U に相当する。ところでデルーリー法の基本式は E（r）$=np$ だから積 np の値は精度よく推定できる。したがって，n と p は反比例の関係にある。これより n は大きな値の方の信頼区間が長くなることがわかる。故に（$n-n^*$）は左右非対称の分布で正規分布とはみなせない。一方，もし（$n-n^*$）が正規分布に従うなら，n の分布は左右対称のはずだから，DeLury が求めた n の信頼区間が左右非対称となるのは矛盾している。むしろ（3.22）式の方が妥当なように思える。しかし，実際の n の信頼区間は大きな値の方が長くなるから，（3.19）式の方が我々の常識と一致する。

この方法は実際のデータに対しては，それほど悪くない推定値を与えるようである。しかし，例えば $m=2$ の場合には多項分布モデルでは区間推定可能であるが，この方法では区間推定不能となる（残差分散が0となるし，t 分布の自由度が0となる)。これは（直線）回帰モデル全般にいえることであるが，2点しかデータがない場合には残差が0となるため区間推定不能である。つまり100％正しい推定値が求まるわけである。これは正規分布に従うデータが1個だけ与えられた場合に相当する。このような極端なデータを解析しようという方が無理である。しかし，数学的には2回だけのデータで n と p は推定可能であり，多項分布モデルでは十分にこれに対応できる。

ここで以上に述べた問題を数学的に厳密に検討してみよう。回帰モデルでは（3．1）式に最小二乗法を用いたわけであるが，これは目的関数

$$Y=\Sigma(r/x-np+pR)^2 \qquad (3.24)$$

を最小にすることである。パラメータを n と p にすると積 np のため非線型モデルとなってしまう。したがって，回帰モデルでは $a=np$，$b=-p$ と変数変換して線型モデルに変換している。つまり，線型と非線型の差，漁獲努力量 x によるスケーリングの差（スケールとして個体数をとるかCPUEをとるかということで，除去法では $x\equiv 1$ だから同一視できる）を除けば，我々の目的関数（1．3）式と本質的に同一である。実は最小二乗法は点推定にのみ寄与しているので，区間推定の問題とは無縁である。したがって，点推定においては従来の回帰モデルでも十分なのである。

さて，区間推定を行うには第1章で述べたように（1．2）式における重み w の評価が不可欠である。多項分布モデルでは二項分布を仮定するので $w=\sigma^2=npq$ とおいている。したがって，$m=2$ の場合でも区間推定可能である。しかし，回帰モデルでは残差が正規分布 $N(0,\sigma^2)$ に従うと仮定し，w として残差分散（3．18）式を使用している。したがって，$m=2$ の場合には推定不能になるのである。w として残差分散以外のものを与えれば推定可能となるが，$w=npq$ とするのが最良であろう。結局，多項分布モデルと回帰モデルは対立するものではない。我々の方法は多項分布モデルにおける最尤法の改良として導かれたものであるが，同時にそれは回帰モデル（最小二乗法）の改良とも解釈できる。

4．応用上の問題点

実際のデータに応用する場合には様々な問題が生じてくる。まず厳密な多項分布モデルを用いる場合を検討する。最初に赤嶺（1990 a）のマルカール法のプログラムを用いて点推定値を求める。このとき目的関数 Y の最小値が示されるが，この値を自由度（$m-2$）の χ^2分布の値と照合する。これは適合度検定で，この値が大きすぎる（97.5％点より上）場合には，多項分布からのデータにしては誤差が大きすぎるということで，区間推定は適用できない（点推定も無効)。逆に（実際上は起こりにくいが）この値が小さすぎる（2.5％点より下）場合は，誤差が小さすぎて不自然である（人工的な操作が加わった可能性が強い)。ひとつの解決方法として適合度検定におけるデータの確率が α％ならば，区間推定の水準を同じ α％とする方法が考えられるが，一般的ではない。

多項分布モデルを用いる場合においても，回帰モデルの作図を行うことは，『散布図を描く』と

いう意味で不可欠である。この図において明らかに回帰していないようなデータは解析不能である。バラバラに散布しているデータは時間を細かく区切りすぎていることが多く，むしろある程度時間の区切りを大きくとった方がよい場合がある。デルーリー法の本質は，除去による密度低下のため漁獲尾数（CPUE）が低下するということであり，この中に時間の概念はない。よいデータでは結果は時間のとり方に左右されない。しかし，我々の対象は生物なので，期間があまり長いと移動や死亡が起こり，デルーリー法の前提が崩れる。常識的な範囲で期間を設定する必要がある。最終的には適合度検定によって合格となるように時間の区切りを考えればよいわけであるが，回帰図を眺めて明らかに直線回帰している場合は適合度も合格であるし，そうでない場合は不合格だろう。

回帰分析の一般論では，一部分だけ回帰していないようなデータはその部分をカットすればよい。このように異常値をカットする方法は『ロバスト推定』に属する方法である。しかし，デルーリー法では横軸の累積漁獲尾数が互いに関係しているので，カットする場合には十分な注意が必要である。実際の磯根資源のデータでは最近『しみ出し』の問題が出てきている。これは漁獲開始当初において CPUE が低下しないという現象である。当初隠れていた資源がしみ出しているためと考えられている。閉鎖資源ではなく加入のある資源ともみなせる。CPUE が減少を始めた時点からデルーリー法で解析すればよいだろう。

結局，多項分布モデルに基づく厳密な方法を使用するのがベストであるが，この方法は回帰モデルと対立するものではない。特に点推定においては，よいデータであれば値はほとんど一致するはずである。区間推定は（適合度検定に合格した場合）今回提示した方法（赤嶺1990 a）で厳密に行うことができる。しかし，従来の回帰モデルによる方法は第３章で検討したように理論的に問題がある。実際に水産分野においてデルーリー法が応用できる範囲は非常に狭い。自然死亡や移動を考慮した拡張モデルもいろいろ開発されているが，いずれも回帰モデルに基づくもので，区間推定には同様の問題がある。

そもそもデルーリー法は初期資源尾数 n と除去率 p を同時に求めようという虫のいい方法なので，信頼区間が非常に大きくなる。n を求めることに主眼がある場合がほとんどだから，p の値を他の調査等によって推定する方が実用的だろう。その場合，p の推定値にも問題が生じるが，p と n を個別に推定するだけ有利である。

今回我々はデルーリー法の区間推定について検討したわけであるが，従来行われていた方法に問題があったこと，計算機の作図機能を利用すればより厳密で統一的な手法が使えること，実際の応用については多くの問題が残っていることが明らかとなった。特に最後の点は重要で，調査器具や測定器具および計算機の発達により，今まで得ることができなかった高い精度のデータが得られるようになってきた。しかし，それらの精度に解析手法が追いつかないという現状である。というよりも，理論は存在していたが（計算機が利用できなかったため）応用不能であったというべきかもしれない。これからはそのような手法が次々と利用可能となってくる。そこで重要となるのはそのような手法を利用できるような調査設計，データ処理の腕である。

文　献

赤嶺達郎（1988 a）　抽出法による個体数推定の誤差（前編）．日水研連絡ニュース，(344)，2－4．

赤嶺達郎（1988 b）　抽出法による個体数推定の誤差（後編）．日水研連絡ニュース，(345)，6－11．

赤嶺達郎（1988 c）　Petersen 法の区間推定（前編）．日水研連絡ニュース，(346)，6－10．

赤嶺達郎（1989 a）　Petersen 法の区間推定（後編）．日水研連絡ニュース，(347)，9－13．

Akamine, T.（1989 b）　An interval estimation for extraction using baysian statistics．日水研報告，(39)，9－17．

Akamine, T.（1989 c）　An interval estimation for the Petersen method using baysian statistics．日水研報告，(39)，19－35．

赤嶺達郎（1989 d）　デルーリー再考．日水研連絡ニュース，(350)，6－11．

赤嶺達郎（1990 a）　デルーリー再考 part 2．日水研連絡ニュース，(351)，8－13．

Akamine T.（1990 b）　An interval estimation of Leslie's method in removal method．日水研報告，(40)，27－49．

Draper, N. R. and Smith, H.（1966）　応用回帰分析．中村慶一訳（1968），森北出版，東京，47－87，261－302．

石岡清英（1988）　成長曲線の当てはめ（Bertalanffy, Gompertz, Logistic）．パソコンによる資源解析プログラム集，東海区水研，35－46．

石岡清英・土井長之・林　凱夫（1981）　大阪湾のシャコ資源量の推定とその評価．南西水研報告，(13)，59－79．

加藤史彦（1988）　加入当り漁獲量の計算と等量線図のプロット．パソコンによる資源解析プログラム集，東海区水研，116－123．

久野英二（1986）　動物の個体群動態研究法Ｉ　個体数推定法．共立出版，東京，39－42．

Matsumiya, Y.（1990）　AIC introduced to Schnute's models by the removal method．日本水産学会誌，**56**(3)，543．

森本光生（1984）　マイコンが描く数学の世界．現代数学社，東京，55－60．

能勢幸雄（1959）　DeLury の資源量推定法の推定値に対する信頼区間について．日本水産学会誌，**24**(12)，953－956．

奥村晴彦（1987）　コンピュータ・アルゴリズム事典．技術評論社，東京，336 pp．

Schnute, J.（1983）　A new approach to estimating populations by the removal method．*Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, **40**，2153－2169．

Seber, G. A. F.（1982）　The estimation of animal abundance and related parameters．2 nd edit. Griffin, London．11－12，296－327，500－504．

田中昌一（1985）　水産資源学総論．恒星社厚生閣，東京，229－235．

Zippin, C.（1956）　An evaluation of the removal method of estimating animal populations. *Biometrics*，**12**，163－189．

［質疑応答］

武野（富山水試）　期間のとり方は等間隔でなければならないのか。

赤嶺　等間隔である必要はない。要するに適合度検定に合格すればよい。その期間内において各個体が同じ確率で漁獲されるという仮定が最重要である。